



# المتتاليات التراجعية والبرهان بالتراجع

## 1 - عموميات حول المتتاليات

### 1.1 تعريف

المتتالية هي دالة  $U$  معرفة على المجموعة  $\mathbb{N}$  أو جزء من  $\mathbb{N}$ .

### اصطلاحات

- نرمز إلى صورة العدد الطبيعي  $n$  بالرمز  $U_n$  بدلا من  $U(n)$ .
- نرمز إلى المتتالية بالرمز  $(U_n)$  بدلا من  $U$ .
- $U_n$  يدعى الحد العام للمتتالية  $(U_n)$  أو الحد ذو الدليل  $n$ .

### ملاحظة

- هناك طريقتان لتوليد متتالية:
- (1) تعيين متتالية بإعطاء العبارة الصريحة للحد العام.
- (2) تعيين متتالية بعلاقة تراجعية.





#### 1 - 4 المتتالية الهندسية

- القول أن  $(U_n)$  متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي  $q$  بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $U_{n+1} = q \times U_n$  ، ويدعى  $q$  أساس المتتالية  $(U_n)$
- من أجل كل عددين طبيعيين  $m$  و  $p$  يكون  $U_m = U_p \times q^{m-p}$
- مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية
- إذا كان  $S = p + \dots + d$  هو مجموع  $m$  حد المتتالية لمتتالية هندسية حدها الأول  $p$  و

أساسها  $q$  فإن  $S = p \times \frac{1-q^m}{1-q}$  حيث  $(q \neq 1)$

#### مثال -

$S$  مجموع الأعداد الحقيقية العرف بـ  $S = 1 + q + \dots + q^{n-1}$   
 $S$  عبارة عن مجموع  $n$  حد أول من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1

وأساسها  $q$  إذن  $S = \frac{1-q^n}{1-q}$

#### تمرين تدريبي 1

$(U_n)$  متتالية معرفة بـ  $U_0 = 1$  و  $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$  من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$

(1) عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج عبارة الحد العام  $U_n$

(2) نفرض أن  $U_n \neq 0$  ونضع  $V_n = \frac{1}{U_n}$

أ- بين أن المتتالية  $(V_n)$  حسابية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب- استنتج عبارة  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$

#### ✓ الحل :

(1)  $U_1 = \frac{U_0}{1+U_0} = \frac{1}{2}$  ،  $U_2 = \frac{U_1}{1+U_1} = \frac{1}{3}$  ،  $U_3 = \frac{U_2}{1+U_2} = \frac{1}{4}$  ،  $U_4 = \frac{U_3}{1+U_3} = \frac{1}{5}$  ،

$U_5 = \frac{U_4}{1+U_4} = \frac{1}{6}$

نلاحظ أن الحدود الأولى لهذه المتتالية تكتب على الشكل  $U_n = \frac{1}{n+1}$

(2) حتى تكون  $(V_n)$  حسابية يجب أن يوجد عدد حقيقي  $r$  بحيث من أجل كل عدد

طبيعي  $n$  يكون  $V_{n+1} - V_n = r$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = 1$

#### مثال -

$(U_n)$  ،  $(V_n)$  ، ثلاث متتاليات معرفة بـ :

$W_0 = 2$  مع  $W_{n+1} = 3W_n - 1$  و  $g: x \mapsto x^2 + 1$  حيث  $V_n = g(n)$  ،  $U_n = (-\frac{1}{2})^n$

- المتتاليتان  $(U_n)$  و  $(V_n)$  معرفتان بحديهما العام وأما للمتتالية  $(W_n)$  فهي تراجعية.

#### 1 - 2 اتجاه تغير متتالية

القول أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماماً يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} > U_n$

القول أن المتتالية  $(U_n)$  متناقصة تماماً يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} < U_n$

القول أن المتتالية  $(U_n)$  ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} = U_n$

#### ملاحظة

بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة أو المتناقصة وذلك بتبديل المتباينة

$U_{n+1} \geq U_n$  بـ  $U_{n+1} < U_n$  (المتباينة)  $U_{n+1} \leq U_n$  بالمتباينة  $U_{n+1} > U_n$

#### مثال -

$(U_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالعبارة  $U_n = 3n + 5$

و منه الحد  $U_{n+1}$  معرف بـ  $U_{n+1} = 3(n+1) + 5 = 3n + 8 = U_n + 3$

بما أن  $3 > 0$  فإن  $(U_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}$

#### 1 - 3 المتتالية الحسابية

• القول أن للمتتالية  $(U_n)$  حسابية يعني أنه يوجد عدد حقيقي  $r$  بحيث من أجل كل عدد

طبيعي  $n$  يكون  $U_{n+1} = U_n + r$  ، يدعى  $r$  أساس المتتالية  $(U_n)$

• من أجل كل عددين طبيعيين  $m$  و  $p$

يكون  $U_m = U_p + (m-p)r$

• مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية

إذا كان  $S = p + \dots + d$  هو مجموع  $m$  حد لمتتالية من متتالية حسابية فإن :

$S = \frac{m}{2}(p+d)$

#### مثال -

ليكن  $S$  مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية  $1, 2, \dots, n$

لاحظ أن  $S$  هو مجموع  $n$  حد أول لمتتالية من متتالية حسابية حدها الأول 1

وحدها الأخير  $n$  وأساسها  $r = 1$  و منه فإن  $S = \frac{n}{2}(1+n)$



ومنه  $(V_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r=1$  وحدها الأول  $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

(ب) عبارة الحد العام  $V_n = V_0 + n \times r$  هي بالتعويض نجد :

$$U_n = \frac{1}{1+n} \text{ ومنه } V_n = 1+n$$

### تمرين تدريبي 2

عين خمسة حدود موجبة من متتالية هندسية  $U_5, U_4, U_3, U_2, U_1$  مع العلم

$$U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2} \text{ و } U_1 \times U_5 = 25 \text{ ان}$$

✓ الحل :

$$U_1 \times U_5 = U_1 \times U_1 \times r^4 = (U_1 \times r^2)^2 = (U_3)^2$$

$$\text{و بما ان } U_1 \times U_5 = 25 \text{ فإن } U_3 = 5$$

$$\text{المساواة } U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \text{ تصبح } U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}$$

$$\text{بما ان } U_3 \text{ الوسط الهندسي لـ } U_2 \text{ و } U_4 \text{ فإن } U_2 \times U_4 = U_3^2 = 25$$

$$(I) \dots \begin{cases} U_2 \times U_4 = 25 \\ U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\text{بعد حل الجملة (I) نجد } U_1 = \frac{5}{4}, U_2 = \frac{5}{2}, U_3 = 5, U_4 = 10, U_5 = 20$$

## 2- البرهان بالتراجع

### 1-2 أهمية البرهان بالتراجع

في الرياضيات توجد بعض الخواص تتعلق بعدد طبيعي  $n$  مثلاً

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ نرمز إلى هذه الخاصية بـ } P_n$$

نستطيع القول ان  $P_1$  صحيحة لأن  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$$1+2 = \frac{2(2+1)}{2} \text{ صحيحة لأن } P_2$$

$$1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} \text{ صحيحة لأن } P_3$$

## المتتاليات التراجعية - البرهان بال

لكن هل  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ؟ إذا كان كذلك فكيف نبينه من العلم انه لا يمكن التحقق من ذلك بالحساب لأن مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  غير منتهية البرهان بالتراجع يسمح لنا باستنتاج صحة الخاصية  $P_n$  من أجل كل  $n \geq 1$  وبالتالي فهو وسيلة تسمح بالمرور من المنتهي إلى اللامنتهي .

### 2-2 مبدأ البرهان بالتراجع :

للبرهان على أن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$  نتبع خطوتين أساسيتين هما :

(1) نتحقق أن  $P_{n_0}$  صحيحة .

(2) نفرض أن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  كفي و على هذا الفرض نبين أن الخاصية  $P_{n+1}$  صحيحة

إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$

### ملاحظة

الفرضية " $P_n$  صحيحة" تسمى فرضية التراجع .

### تمرين تدريبي 1

برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  اكبر من أو يساوي 1 يكون :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ الحل :

من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  نسمي  $P_n$  الخاصية

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$P_1$  صحيحة لأن  $1^2 = 1$  و  $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

- نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$





## تطبيقات نموذجية



### تطبيق 1

دراسة اتجاه تغير متتالية

ما هي المتتاليات الرتيبة من بين المتتاليات العطااة ؟

$$(1) \quad U_n = 3n + 5 \quad (ج) \quad U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n$$

$$(ب) \quad U_n = n! \quad (د) \quad U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 4 \quad \text{و} \quad U_0 = 7$$

الحل :

لعرفة اتجاه تغير متتالية نعين إشارة المقدار  $U_{n+1} - U_n$

$$(1) \quad U_{n+1} - U_n = [3(n+1) + 5] - (3n + 5) = 3$$

بما أن من كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $U_{n+1} - U_n > 0$  فإن  $(U_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}$ .

$$(ب) \quad n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \quad \text{مع} \quad n \geq 1$$

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 - n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$= n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 [n+1-1] = (n!) \times n$$

بما أن  $n! > 0$  و  $n \geq 1$  فإن  $U_{n+1} - U_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}^*$ .

$$(ج) \quad U_{n+1} - U_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} - (n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n\right] = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $2^{n+1} > 2^0$  بقلب طرفي المتباينة نجد  $1 < \frac{1}{2^{n+1}}$

وبطرح 1 من طرفي هذه الأخيرة نجد  $\frac{1}{2^{n+1}} - 1 < 0$  أي  $U_{n+1} - U_n < 0$

بالتالي  $(U_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$

$$(د) \quad U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n + 4 - U_n = -\frac{2}{5}U_n + 4 = -\frac{2}{5}(U_n - 10)$$

لعرفة إشارة  $U_{n+1} - U_n$  لابد من معرفة إشارة  $U_n - 10$ .

من أجل  $n=0$  نجد  $U_0 - 10 < 0$  وبالتالي  $U_{n+1} - U_n > 0$  صحيحة من أجل  $n=0$ .

هل الخاصية  $U_n - 10 < 0$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي ؟ للإجابة عن ذلك

نستعمل البرهان بالتراجع :

نسمي الخاصية  $P_n$  الخاصية  $U_n - 10 < 0$

$P_0$  صحيحة لأن  $U_0 - 10 < 0$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3) \quad \text{لأن}$$

إذن الخاصية  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$

### تمرين تدريبي 2

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  العدد  $10^n - 1$  يقبل القسمة على 9

الحل :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نسمي الخاصية  $P_n$  "العدد  $10^n - 1$  يقبل القسمة على 9".  
بما أن  $10^0 - 1 = 0$  و الصفر يقبل القسمة على 9 فإن  $P_0$  صحيحة.

- نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n \geq 0$  أي  $10^n - 1 = 9k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $10^{n+1} - 1 = 9k'$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1 = 10^n(1+9) - 1 = (10^n - 1) + 9 \times 10^n$$

$$= 9k + 9 \times 10^n = 9(k + 10^n) = 9k'$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

### تمرين تدريبي 3

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$  يكون  $2^n > n$ .

الحل :

$P_1$  صحيحة لأن  $2^1 > 1$

- نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n \geq 1$  أي  $2^n > n$  ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة

أي  $2^{n+1} > n+1$ .

بضرب طرفي المتباينة  $2^n > n$  بالعدد 2 نجد  $2^{n+1} > 2n$  (1)

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $2n \geq n+1$  (2)

من (1) و (2) نستنتج أن  $2^{n+1} > n+1$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.



- نفرض أن  $P_n$  صحيحة أي  $U_n - 10 < 0$  ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $U_{n+1} - 10 < 0$

$$U_{n+1} - 10 = \frac{3}{5} U_n + 4 - 10 = \frac{3}{5} U_n - 6 = \frac{3}{5} (U_n - 10)$$

بما أن  $U_n - 10 < 0$  فإن  $\frac{3}{5} (U_n - 10) < 0$  وعليه فإن  $U_{n+1} - 10 < 0$  إذن  $P_{n+1}$  صحيحة وبالتالي الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  وعليه فالمتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

### تطبيق 2 -

نعرف من أجل كل عدد طبيعي  $n$  المتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  كما يلي:  
 $V_n = U_{2n} - U_n$  و  $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$   
 برهن أن المتتالية  $(V_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

✓ الحل:

لكي تكون المتتالية  $(V_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  يجب أن يكون  $V_{n+1} - V_n > 0$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= (U_{2n+2} - U_{n+1}) - (U_{2n} - U_n) = (U_{2n+2} - U_{2n}) - (U_{n+1} - U_n) \\ &= \left( \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left( \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2(n+1) + 2n + 1 - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \end{aligned}$$

بما أن  $\frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$  فإن  $V_{n+1} - V_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(V_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

### تطبيق 3 -

$(U_n)$  متتالية هندسية أساسها 5 وحدها الأول  $U_1 = -2$   
 (1) عر عن  $U_n$  بدلالة  $n$   
 (2) احسب  $U_1 + U_2 + \dots + U_7$   
 (3) لتكن  $(V_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالعلاقة:  
 $V_n = U_{2n}$  احسب المجموع  $V_1 + V_2 + \dots + V_n$  بدلالة  $n$ .



✓ الحل

(1)  $U_n = U_1 \times q^{n-1}$  حيث  $q$  هو الأساس و  $U_1$  الحد الأول  
 بتعويض قيمة  $q$  و  $U_1$  في عبارة  $U_n$  نجد  $U_n = -2 \times 5^{n-1}$

$$U_1 + U_2 + \dots + U_7 = U_1 \times \frac{1-q^7}{1-q} = -2 \times \frac{1-5^7}{1-5} = \frac{1-5^7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \frac{-2 \times 5^{2n+2-1}}{-2 \times 5^{2n-1}} = 5^2 = 25 \quad (3)$$

إذن  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q' = q^2$  وحدها الأول  $V_1 = U_2$  ومنه

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \dots + V_n &= V_1 \times \frac{1-q'^n}{1-q'} = U_2 \times \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} = U_2 \times \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} \\ &= -10 \times \frac{1-5^{2n}}{1-25} = \frac{5}{12} (1-5^{2n}) \end{aligned}$$

تطبيق 4 -

تعيين أساس متتالية هندسية

$(U_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  بحيث من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم،

$$\sum_{p=1}^n U_p = \frac{3^n - 1}{2}$$

(1) احسب  $U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9$

(2) بين أن  $(U_n)$  متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $U_1$ .

✓ الحل:

$$S_1 = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{3^3 - 1}{2} = 13 \quad (1)$$

$$S_2 = U_1 + U_2 + \dots + U_9 = \frac{3^9 - 1}{2} = 9841$$

$$S_2 - S_1 = U_4 + U_5 + \dots + U_9 = 9841 - 13 = 9828$$

$$(1) \dots U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \quad (2)$$

$$(2) \dots U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$U_n = \frac{3^n - 1}{2} - \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^n - 3^{n-1}}{2} = 3^{n-1}$$

بما أن  $(U_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  فإن حدها الأول هو  $U_1 = 3^{1-1} = 1$  وأساسها  $r = 3$ .



### تطبيق 5 .

البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

(1) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي:  
 $U_1=1$  و  $U_2=3$  و  $U_{n+2}=3U_{n+1}-2U_n$   
 (1) من أجل  $n \geq 1$  نضع  $V_n = U_{n+1} - U_n$   
 (أ) ماهي طبيعة المتتالية  $(V_n)$  ؟  
 (ب) استنتج عبارة  $V_n$  بدلالة  $n$ .  
 (2) بين بالتراجع أن  $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^n V_r$  ثم استنتج عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$ .

✓ الحل :

(1)  $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1} = 2U_{n+1} - 2U_n = 2(U_{n+1} - U_n) = 2V_n$   
 ومنه  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q=2$  وحدها الأول  $V_1 = U_2 - U_1 = 2$   
 (ب)  $V_n = V_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$   
 (2) نسمي  $P_n$  الخاصية  $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^n V_r$

$P_1$  صحيحة لأن  $U_2 - U_1 = 3 - 1 = 2 = \sum_{r=1}^1 V_r = V_1 = 2$  و  $U_2 - U_1 = 3 - 1 = 2 = \sum_{r=1}^2 V_r = V_1 + V_2 = 2 + 2 = 4$   
 • نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^n V_r$

ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $U_{n+2} - U_1 = \sum_{r=1}^{n+1} V_r$   
 $U_{n+2} - U_1 = 3U_{n+1} - 2U_n - U_1 = 2(U_{n+1} - U_n) + U_{n+1} - U_1$   
 $= 2V_n + \sum_{r=1}^n V_r = V_{n+1} + \sum_{r=1}^n V_r = \sum_{r=1}^{n+1} V_r$   
 إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

لدينا  $U_n - U_1 = \sum_{r=1}^{n-1} V_r$

ومنه  $U_n = U_1 + \sum_{r=1}^{n-1} V_r$

$$U_n = U_1 + V_1 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = 1 + 2 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = -1 + 2^n$$

### تطبيق 6 .

البرهان بالتراجع وتحديد أساس متتالية هندسية

نعتبر  $(U_n)$  متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي الواحد بالعلاقة  $U_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}U_n$  و  $U_1 = a$  مع  $a$  عدد حقيقي معطى ، و لتكن  $(V_n)$  متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل طبيعي  $n \geq 1$  بـ  $V_n = 13U_n - 4$   
 (1) بين أن  $(V_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $k$   
 (2) اكتب  $V_n$  بدلالة  $n$  و  $a$  ثم استنتج  $U_n$  بدلالة  $n$  و  $a$

✓ الحل :

$$V_{n+1} = 13U_{n+1} - 4 = 13 \times \frac{4}{10} - 13 \times \frac{3}{10}U_n - 4 = \frac{26}{5} - \frac{39}{10}U_n - 4 = \frac{26}{5} - \frac{3}{10}(13U_n - 4) - 4 = \frac{26}{5} - \frac{3}{10}V_n - 4 = -\frac{3}{4}V_n$$

إذن  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها  $k = -\frac{3}{10}$  وحدها الأول  $V_1 = 13U_1 - 4 = 13a - 4$

$$V_n = V_1 \times k^{n-1} = (13a - 4) \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

$$U_n = \frac{V_n + 4}{13} = \frac{(13a - 4) \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + 4}{13}$$



البرهان بالتراجع وتحديد حدود المتتالية الهندسية

### تطبيق 7 .

(1)  $U_n$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $U_0 = a$  و  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n^2 + n$   
 (أ) أوجد كثير حدود من الدرجة الثانية  $P(x)$  بحيث المتتالية  $(a_n)$  ذات الحد العام  $a_n = P(n)$  تحقق العلاقة (1)  
 (2) بين أن المتتالية  $(V_n)$  ذات الحد العام  $V_n = U_n - a_n$  هندسية.  
 (3) اكتب  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$  و  $a$

✓ الحل :

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta \text{ حيث } \alpha = 0$$



إذن  $a_n = \alpha n^2 + \beta n + \delta$  تحقق العلاقة (1) وهذا معناه أن:

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \delta = \frac{1}{2} \alpha n^2 + \frac{1}{2} \beta n + \frac{1}{2} \delta + n^2 + n$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$(2) \dots \dots \dots \left( \frac{1}{2} \alpha - 1 \right) n^2 + \left( 2\alpha + \frac{1}{2} \beta - 1 \right) n + \alpha + \beta + \delta - \frac{1}{2} \delta = 0$$

المساواة (2) محققة من أجل كل عدد طبيعي إذا فقط إذا كان:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \alpha - 1 = 0 \\ 2\alpha + \frac{1}{2} \beta - 1 = 0 \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \delta = 0 \end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نجد  $\alpha = 0$  و  $\beta = -6$  و  $\delta = 8$

$$P(x) = 2x^2 - 6x + 8$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + n^2 + n - 2(n+1)^2 + 6(n+1) - 8 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} (U_n - 2n^2 + 6n - 8) = \frac{1}{2} [U_n - (2n^2 - 6n + 8)]$$

$$= \frac{1}{2} (U_n - a_n) = \frac{1}{2} V_n$$

إذن  $(V_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $V_0 = U_0 - a_0 = a - 8$

$$V_n = V_0 \times q^n = (a-8) \left( \frac{1}{2} \right)^n \quad (3)$$

$$U_n = V_n + a_n = (a-8) \left( \frac{1}{2} \right)^n + 2n^2 - 6n + 8$$

### تطبيق 8

مجموع تعيين ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$a, b, c$  ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث  $a \cdot b \cdot c = 64$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{8}$$

الحل:

بما أن  $a, b, c$  ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن  $ac = b^2$

$$\begin{cases} b^3 = 64 \\ ac = b^2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} abc = 64 \\ ac = b^2 \end{cases}$$

بتعويض قيمة  $b$  في المساواة  $\frac{7}{8} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$  نجد  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8}$

$$\text{إذن (1) } \dots \dots \dots \begin{cases} ac = 16 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$(1) \text{ تكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{16}{a}} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{1}{a} + \frac{a}{16} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{16+a^2}{16a} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\text{تكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ a^2 - 10a + 16 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{16+a^2}{2a} = 5 \end{cases}$$

$$a^2 - 10a + 16 = 0$$

ومنه  $a_1 = 8$  و  $a_2 = 2$

$a = a_1$  يكافئ  $c_1 = \frac{16}{8} = 2$  منه  $(a, b, c) = (8, 4, 2)$

$a = a_2$  يكافئ  $c_2 = \frac{16}{2} = 8$  منه  $(a, b, c) = (2, 4, 8)$

### تطبيق 9

مجموع البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$

$$T_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \text{ و } S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$$

برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$   $S_n = T_n$

الحل:

نسمي الخاصية " $S_n = T_n$ "

$$P_1 \text{ صحيحة لأن } S_1 = 1 \times 2 = 2 \text{ و } T_1 = \frac{1}{3} \times 1(1+1)(1+2) = 2$$

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $S_n = T_n$  ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي

$$S_{n+1} = T_{n+1}$$

$$S_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n+1)(n+2)$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$$

$$= S_n + (n+1)(n+2) = T_n + (n+1)(n+2)$$



### تطبيق ٩.

البرهان بالتراجع وإثبات متباينة

نضع  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  حيث  $n \geq 1$  وبقرا "عاطلي"  $n$   
برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n! \geq 2^{n-1}$

✓ الحل

نسمي الخاصية " $n! \geq 2^{n-1}$ "

$P_1$  صحيحة لأن  $1! = 1$  و  $2^0 = 1$  وللتباينة  $1 \geq 1$  صحيحة.

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $n! \geq 2^{n-1}$ .

ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي  $(n+1)! \geq 2^n$

بضرب طرفي المتباينة  $n! \geq 2^{n-1}$  بالعدد  $(n+1)$  نجد  $(n+1) \times (n!) \geq (n+1)2^{n-1}$  لكن  $(n+1) \times (n!) = (n+1)!$  و عليه المتباينة الأخيرة تصبح

$$(n+1)! \geq (n+1) \times 2^{n-1} \dots (1)$$

من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n+1 \geq 2$

بضرب طرفي المتباينة  $n+1 \geq 2$  بالعدد  $2^{n-1}$  نجد  $2^n \geq (n+1)2^{n-1} \dots (2)$

من (1) و (2) نجد  $(n+1)! \geq 2^n$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة وبالتالي الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

### تطبيق ١٠.

البرهان بالتراجع وقابلية القسمة

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون العدد  $5^{2n+1} - 5$  يقبل القسمة على 6.

✓ الحل

نسمي الخاصية " $5^{2n+1} - 5$  يقبل القسمة على 6."

$P_0$  صحيحة لأن  $5^1 - 5 = 0$  و الصفر يقبل القسمة على 6.

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $5^{2n+1} - 5 = 6\alpha$  مع  $\alpha \in \mathbb{N}$  ونبرهن

صحة  $P_{n+1}$  أي  $5^{2n+3} - 5 = 6\beta$  مع  $\beta \in \mathbb{N}$

$$5^{2n+3} - 5 = 5^{2n+1} \times 5^2 - 5 = 5^{2n+1}(24+1) - 5 = 5^{2n+1} - 5 + 24 \times 5^{2n+1}$$

$$= 6\alpha + 24 \times 5^{2n+1} = 6(\alpha + 4 \times 5^{2n+1}) = 6\beta$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة وبالتالي  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3) = T_{n+1}$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

### تطبيق ١٠.

البرهان بالتراجع وإثبات متباينة

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نسمي  $P_n$  الخاصية  $3^n \geq (n+2)^2$

(1) هل  $P_0, P_1, P_2, P_3$  صحيحة؟

(2) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 3$   $P_n$  صحيحة.

✓ الحل :

(1) بما أن  $3^0 = 1$  و  $(0+2)^2 = 4$  فإن للتباينة  $1 \geq 4$  خاطئة وبالتالي  $P_0$  خاطئة.

- بما أن  $3^1 = 3$  و  $(1+2)^2 = 9$  والمتباينة  $3 \geq 9$  خاطئة فإن  $P_1$  خاطئة

- بما أن  $3^2 = 9$  و  $(2+2)^2 = 16$  والمتباينة  $9 \geq 16$  خاطئة فإن  $P_2$  خاطئة

- بما أن  $3^3 = 27$  و  $(3+2)^2 = 25$  والمتباينة  $27 \geq 25$  صحيحة وبالتالي  $P_3$  صحيحة

(2)  $P_3$  صحيحة من السؤال.

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $3^n \geq (n+2)^2$  ونبرهن أن  $P_{n+1}$

صحيحة أي  $3^{n+1} \geq (n+3)^2$ .

بضرب المتباينة  $3^n \geq (n+2)^2$  بالعدد 3 نجد (1)  $3^{n+1} \geq 3(n+2)^2$

لكي تكون  $P_{n+1}$  صحيحة يجب أن يكون (2)  $3(n+2)^2 \geq (n+3)^2$

(2) تكافئ  $3(n+2)^2 - (n+3)^2 \geq 0$  تكافئ  $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$

$x$	$\frac{-6-\sqrt{12}}{4}$	$\frac{-6+\sqrt{12}}{4}$	$+\infty$
			$-\infty$
$2x^2 + 6x + 3$	+	-	+

من الجدول نستنتج أن  $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$  من أجل كل عدد طبيعي و بالتالي المتباينة (2)

صحيحة إذن من (1) و (2) نستنتج أن  $3^{n+1} \geq (n+3)^2$  و عليه فالخاصية  $P_n$  صحيحة

من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 3$ .



### تطبيق 18.

البرهان بالتراجع وقابلية القسمة

برهن على صحة الخاصية  $P_n$ : "  $2^{n+2} + 3^{n+1}$  مضاعف للعدد 7 " من أجل كل عدد طبيعي  $n$

الحل ✓

$P_0$  صحيحة لأن  $2^{0+2} + 3^{0+1} = 7$  مضاعف للعدد 7.  
نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $2^{n+2} + 3^{n+1}$  مضاعف للعدد 7 ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي  $2^{n+3} + 3^{n+2}$  مضاعف للعدد 7  
$$2^{n+3} + 3^{n+2} = 2^{n+2} \times 2 + 3^{n+1} \times 3 = 2^{n+2} \times (2+3) + 3^{n+1} \times 2 = 2^{n+2} \times 5 + 2^{n+2} \times 3 = 2^{n+2} \times (5+3) = 2^{n+2} \times 8 = 2^{n+2} \times 7 = 7 \times 2^{n+2}$$
  
إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

### تطبيق 19.

البرهان بالتراجع وقابلية القسمة

ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  عددين طبيعيين غير معدومين بحيث  $\alpha \neq \beta$   
(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  يكون  $\alpha^n - \beta^n$  يقبل القسمة على  $\alpha - \beta$ .  
(2) استنتج أن  $6^{n+3} - 7^{n+1}$  يقبل القسمة على 209.

الحل ✓

(1) نسمي  $P_n$  الخاصية " $\alpha^n - \beta^n$  يقبل القسمة على  $\alpha - \beta$ "  
 $P_0$  صحيحة لأن  $\alpha^0 - \beta^0 = 0$  و 0 يقبل القسمة على  $\alpha - \beta$ .  
نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي  $n$  أي  $\alpha^n - \beta^n = \lambda(\alpha - \beta)$  ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي  $\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = \lambda'(\alpha - \beta)$   
$$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} = \alpha^n \alpha - \beta^n \beta = \alpha^n (\alpha - \beta) + \beta^n (\alpha - \beta) = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^n + \beta^n) = (\alpha - \beta) \times \lambda'$$
  
إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

$$6^{n+3} - 7^{n+1} = (6^3)^{n+1} - 7^{n+1} = 216^{n+1} - 7^{n+1} \quad (2)$$

من السؤال (1) نستنتج أن  $216^{n+1} - 7^{n+1}$  يقبل القسمة على  $216 - 7$  أي يقبل القسمة على 209.

### تطبيق 15.

البرهان بالتراجع وقابلية القسمة

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $a \geq 1$  يكون العدد  $a(a^{2^n} - 1)$  قابلاً للقسمة على 6.

الحل ✓

نسمي  $P_n$  الخاصية " $a(a^{2^n} - 1)$  يقبل القسمة على 6".

$$\alpha_{(a,n)} = a(a^{2^n} - 1)$$

(1) من أجل  $n=1$  يكون  $\alpha_{(a,1)} = a(a^2 - 1)$

نبرهن بالتراجع أن العدد  $\alpha_{(a,1)}$  يقبل القسمة على 6.

نسمي  $q_a$  الخاصية " $\alpha_{(a,1)}$  يقبل القسمة على 6".

$q_1$  صحيحة لأن  $\alpha_{(1,1)} = 0$  والصفر يقبل القسمة على 6.

نفرض أن  $q_a$  صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي أي  $\alpha_{(a,1)} = 6\lambda$  ونبرهن

$$q_{a+1} \text{ أي } \alpha_{(a+1,1)} = 6\lambda'$$

$$\alpha_{(a+1,1)} = (a+1)((a+1)^2 - 1) = (a+1)(a^2 - 1 + 2a + 1)$$

$$= a(a^2 - 1) + (a^2 - 1) + (a+1)(2a + 1) = 6\lambda + (a+1)(3a)$$

لاحظ أن العدد  $a(a+1)$  زوجي، وبالتالي فالعدد  $3a(a+1)$  يقبل القسمة على 6.

$$\alpha_{(a+1,1)} = 6\lambda + 6k = 6(\lambda + k) = 6\lambda' \text{ إذن}$$

منه  $q_{a+1}$  صحيحة وبالتالي  $q_a$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

و عليه فإن  $P_1$  صحيحة.

$$(2) \text{ نفرض أن } P_n \text{ صحيحة أي } a(a^{2^n} - 1) = 6\beta$$

$$\text{و نبرهن صحة } P_{n+1} \text{ صحيحة أي } a(a^{2^{n+2}} - 1) = 6\beta'$$

$$a(a^{2^{n+2}} - 1) = a[a^{2^{n+2}} - 1 + a^2 - a^2]$$

$$= a[a^2(a^{2^n} - 1) + (a^2 - 1)]$$

$$= a^2 a(a^{2^n} - 1) + a(a^2 - 1)$$

$$= a^2 \times 6\beta + 6\lambda = 6(a^2\beta + \lambda) = 6\beta'$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  و من أجل

كل  $a \geq 1$ .





تطبيق 16

برهن أن  $(U_n)$  متتالية معرفة بـ  $U_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معلوم:

- 1)  $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$
- 2)  $U_n > 0$  يكون  $n$  طبيعي
- 3)  $U_n$  متزايدة تماما.

الحل

1) نسمي  $P_n$  الخاصية  $U_n > 0$

$P_0$  صحيحة لأن  $U_0 > 0$

- نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $U_n > 0$

ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي  $U_{n+1} > 0$

بإضافة 2 إلى حدود المتباينة  $U_n > 0$  نتحصل على  $U_n + 2 > 2$

وبجذر حدود هذه الأخيرة نجد  $\sqrt{U_n + 2} > \sqrt{2}$  أي  $2 > U_{n+1} > 0$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة وعليه فإن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2+U_n} - U_n = \frac{2+U_n - U_n^2}{\sqrt{2+U_n} + U_n} = \frac{(U_n - 2)(-U_n - 1)}{\sqrt{2+U_n} + U_n} \quad (2)$$

بما أن  $U_n > 0$  فإن  $U_n - 2 < 0$  و  $-U_n - 1 < 0$

$$\frac{(U_n - 2)(-U_n - 1)}{\sqrt{2+U_n} + U_n} > 0$$

إذن  $(U_n)$  متتالية متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

تطبيق 17

برهن أن  $(U_n)$  متتالية معرفة بـ  $U_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معلوم:

- 1)  $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$
- 2)  $U_n > 0$  يكون  $n$  طبيعي
- 3)  $U_n$  متزايدة تماما.

الحل

نسمي  $P_n$  الخاصية  $U_n = a_n + b_n \sqrt{3}$

$P_1$  صحيحة لأن  $(2+\sqrt{3})^1 = a_1 + b_1 \sqrt{3}$  حيث  $a_1 = 2$  و  $b_1 = 1$

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$$

ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $(2+\sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$

بضرب طرفي المساواة (1) بالعدد  $2+\sqrt{3}$  نجد:

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n \sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$

بعد النشر و التبسيط نجد:

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2a_n + 3b_n) + \sqrt{3}(2b_n + a_n)$$

بوضع  $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$  و  $b_{n+1} = 2b_n + a_n$

للمساواة (2) تصبح:

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$$

وبما أن  $a_n$  و  $b_n$  عدنان طبيعيان فإن  $a_{n+1}$  و  $b_{n+1}$  عدنان طبيعيان.

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

تطبيق 18

برهن أن  $(U_n)$  متتالية معرفة بـ  $U_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معلوم:

- 1)  $U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n}$
- 2)  $U_n$  متزايدة تماما.
- 3)  $U_n$  متزايدة تماما.

الحل

$$U_2 = \frac{2U_1 - 1}{U_1} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1 \quad U_3 = \frac{2U_2 - 1}{U_2} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1 \quad U_4 = \frac{2U_3 - 1}{U_3} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1$$

نلاحظ أن البسط و المقام عدنان طبيعيان متتابعان إذن يمكن كتابة  $U_n = \frac{n+1}{n}$

نسمي  $P_n$  الخاصية  $U_n = \frac{n+1}{n}$

$P_1$  صحيحة لأن  $U_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  أي  $U_n = \frac{n+1}{n}$

ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $U_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$





$$U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{n} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1}{n} = \frac{2n+2-n}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و منه نستنتج أن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

### تطبيق 19 تخمين عبارة حد عام لمتتالية وإثبات صحته بالتراجع

( $U_n$ ) متتالية معرفة بـ  $U_0 = 2$  و  $U_{n+1} = 2U_n - 3$

(1) احسب  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$

(2) تخمين عبارة الحد العام  $U_n$  ثم برهن على صحتها

(3) بحساب  $U_{n-3}$  من أجل كل  $n \geq 0$  عبر عن  $U_n$  بدلالة  $n$  (طريقة ثانية)

الحل

$$(1) U_1 = 2U_0 - 3 = 1, U_2 = 2U_1 - 3 = -1, U_3 = 2U_2 - 3 = -5, U_4 = 2U_3 - 3 = -13, U_5 = 2U_4 - 3 = -29$$

$$(2) يمكن كتابة$$

$$U_1 = -2^1 + 3, U_2 = -2^2 + 3, U_3 = -2^3 + 3, U_4 = -2^4 + 3, U_5 = -2^5 + 3$$

$$U_n = -2^n + 3$$

و بالتالي يمكن كتابة  $U_n$  على الشكل  $U_n = -2^n + 3$

نسعى  $P_n$  الخاصية  $U_n = -2^n + 3$

$P_0$  صحيحة لأن  $U_0 = 2 = -2^0 + 3$

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي  $n$  أي  $U_n = -2^n + 3$

ونبرهن صحة  $P_{n+1}$  أي  $U_{n+1} = -2^{n+1} + 3$

$$U_{n+1} = 2U_n - 3 = 2(-2^n + 3) - 3 = -2^{n+1} + 3$$

منه  $P_{n+1}$  صحيحة وبالتالي  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي

$$(3) U_0 - 3 = 2 - 3 = -1 = -2^0$$

$$U_1 - 3 = 1 - 3 = -2 = -2^1$$

$$U_2 - 3 = -1 - 3 = -4 = -2^2$$

$$U_3 - 3 = -5 - 3 = -8 = -2^3$$

$$U_4 - 3 = -13 - 3 = -16 = -2^4$$

نلاحظ أن  $U_n - 3$  تكتب على الشكل :

$-2^n$  أي  $U_n = -2^n + 3$  (يمكنك إثبات ذلك بالتراجع)



### تطبيق 20 تخمين عبارة حد عام لمتتالية وإثبات صحته بالتراجع

( $Q_n$ ) متتالية كثيرة حدود معرفة من أجل كل عدد حقيقي  $x$  بـ  $Q_0(x) = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا

$$Q_{n+1}(x) = x Q_n(x+1)$$

(1) اوجد  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$  و  $Q_3(x)$  بدلالة  $x$

(2) تخمين كتابة  $Q_n(x)$  على شكل جداء عوامل

(3) برهن صحة هذا التخمين

الحل

$$Q_1(x) = x Q_0(x+1) = x \times 1 = x$$

$$Q_2(x) = x Q_1(x+1) = x(1+x)$$

$$Q_3(x) = x Q_2(x+1) = x(1+x)(x+2)$$

(2) من عبارات  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$ ,  $Q_3(x)$  نستنتج أنه يمكن كتابة

$$Q_n(x) = (x+0)(x+1) \times (x+2) \times \dots \times (x+n-1)$$

(3) نسعى  $P_n$  الخاصية " $Q_n(x) = x(x+1) \times \dots \times (x+n-1)$ "

$P_1$  صحيحة لأن  $Q_1(x) = (x+0)$

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي غير معدوم أي

$$Q_n(x) = x(x+1) \times \dots \times (x+n-1)$$

ونبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي

$$Q_{n+1}(x) = x(x+1) \times \dots \times (x+n)$$

$$Q_{n+1}(x) = x Q_n(x+1) = x \times (x+1)(x+2) \times \dots \times (x+1+n-1)$$

$$= x \times (x+1)(x+2) \times \dots \times (x+n)$$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

### تطبيق 21 البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

$\theta$  عدد حقيقي من المجال  $0, \frac{\pi}{2}$  و ( $U_n$ ) متتالية معرفة بـ

$$U_0 = 2 \cos \theta \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$$

(1) احسب  $U_1$  و  $U_2$

(2) بين بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي  $U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$



✓ الحل

$$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} \quad (1)$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

بما أن  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  فإن  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$  وبالتالي  $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$U_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\cos\frac{\theta}{4}$$

(2) نسمي  $P_n$  الخاصية  $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

$$U_0 = 2\cos\theta = 2\cos\frac{\theta}{2^0}$$

- نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي  $n$  أي  $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$  ونبرهن

$$U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\right|$$

بما أن  $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  فإن  $\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} > 0$  وبالتالي  $U_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

إذن  $P_{n+1}$  صحيحة و عليه فإن  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.



## تمارين و مسائل



(1) - متتالية معرفة بـ  $V_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $V_{n+1} = 3V_n - 1$   
احسب  $V_2$  ثم عبر عن  $V_{n+2}$  بدلالة  $V_n$ .

(2) - متتالية عبارة عنها العام  $U_n = \frac{n}{n^2+4}$   
عبر عن  $U_{n+1}$ ،  $U_{n-3}$  و  $U_{2n}$  بدلالة  $n$ .

(3) - عين المتتالية الرتبة من بين المتتاليات التالية :

$$(1) U_n = -2n+1, (2) U_n = \frac{n+2}{n+3}$$

$$(3) U_n = n!, (4) U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$(5) U_0 = 4 \text{ و } U_{n+1} = \frac{5}{6}U_n + 2$$

(4) - من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $U_n = \frac{1}{n}$  و  $V_n = \frac{-1}{n^2}$

ادرس رتبة المتتاليات التالية  $(U_n)$ ،  $(V_n)$ ،  $(U_n + V_n)$ ،  $(U_n \times V_n)$

(5) - نعتبر المتتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $U_0 = 2$  و  $U_1 = 4$  و  $U_{n+1} = 4U_n - U_{n-1}$

(1) اوجد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث  $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$

(2) متتالية بحيث  $V_n = U_{n+1} - aU_n$  مع  $n \in \mathbb{N}$   
بين أن  $(V_n)$  هندسية أساسها  $b$ .

(3) متتالية بحيث  $W_n = U_{n+1} - bU_n$  مع  $n \in \mathbb{N}$   
بين أن للمتتالية  $(W_n)$  هندسية أساسها  $a$ .

(4) اعط عبارة صريحة لـ  $V_n$  و  $W_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$ .

(6) -  $a$ ،  $b$ ،  $c$  ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة و  $a \neq 0$ ، بحيث  $a$ ،  $b$ ،  $c$  بهذا الترتيب



حدود متتالية من متتالية هندسية أساسها  $q$  و  $a, 3a, 2b, c$  بهذا الترتيب حدود متتالية من متتالية حسابية. احسب  $q$ .

7 -  $(U_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$  يكون  $\sum_{p=1}^n U_p = 2n^2 + 7n$  بين أن  $(U_n)$  متتالية حسابية معينا أساسها.

8 -  $(U_n)$  متتالية معرفة بـ  $U_0$  و علاقة تراجعية  $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+3U_n}$  احسب الأربعة الحدود الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج مقولوب كل منها ماذا تلاحظ؟  
(2) باستعمال المتتالية  $(V_n)$  حيث  $V_n = \frac{1}{U_n}$  اوجد عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$ .

9 - نريد حفر بئر تكلفة المتر الأول هي 1000 DA و كلما تعمقنا في الحفر تزداد تكلفة المتر الواحد بمقدار ثابت هو 1500 DA.  
(1) ما هي تكلفة البئر إذا حفرتنا 30 متر؟  
(2) ما هو العمق الذي نصل إليه إذا كانت لدينا ميزانية 16000 DA ؟

10 -  $(U_n)$  متتالية هندسية بحيث  $U_1 + U_2 + U_3 = 465$  ،  $U_1 \times U_2 \times U_3 = 421875$  احسب  $U_5$ .

11 - (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم،  
$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 تضع  $S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (n-1) \times 2^{n-2}$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل  $n \geq 2$  يكون  $S_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1$

(3)  $a$  عدد حقيقي موجب تماما . برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معلوم  $(1+a)^n \geq 1+na$

12 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون،

$$(1) \quad 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \dots (2n)$$

$$(2) \quad 14n^3 + 9n^2 + n \text{ يقبل القسمة على } 6$$

$$(3) \quad 2^{3n} - 1 \text{ مضاعف للعدد } 7$$

13 - (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $5 + 4 \times 2^{2n}$  يقبل القسمة على 3.  
(2) نضع  $L_n = 2^{2n} [(2^{2n+1} - 1) - 1]$

$$(1) \text{ بين أن } Q_n = 5 + 4 \times 2^{2n} \text{ حيث } L_{n+1} - 16L_n = 3Q_n$$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $L_n$  يقبل القسمة على 9.

14 -  $a$  طول القطعة  $[AB]$  و لتكن  $M_1$  منتصف  $[AB]$  ،  $M_2$  منتصف  $[BM_1]$  ،  $M_3$  منتصف  $[M_1M_2]$  ،  $M_n$  منتصف القطعة  $[M_{n-2}M_{n-1}]$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $AM_n = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^r a}{2^r} + a$

15 -  $(U_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $U_0 = 1$  و  $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 3}$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $1 \geq U_n \geq 0$   
(2) بين أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة .

16 -  $x$  عدد حقيقي، نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$   
$$C_n = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$$

(1) بين أن  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$  و  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

(2) حول العبارتين التاليتين إلى مجاميع  $\sin(nx) \cos(nx)$  و  $\sin x \cos(2n+1)x$

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$   
$$C_n = \frac{\cos(nx) \sin(nx)}{\sin x} \text{ لدينا } k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi$$

17 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم  $n$

$$\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2^2} \tan\left(\frac{x}{2^2}\right) + \dots + \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}$$

حيث  $k \in \mathbb{Z}$  و  $x \neq 2k\pi$

18 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم

$$\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \times \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

